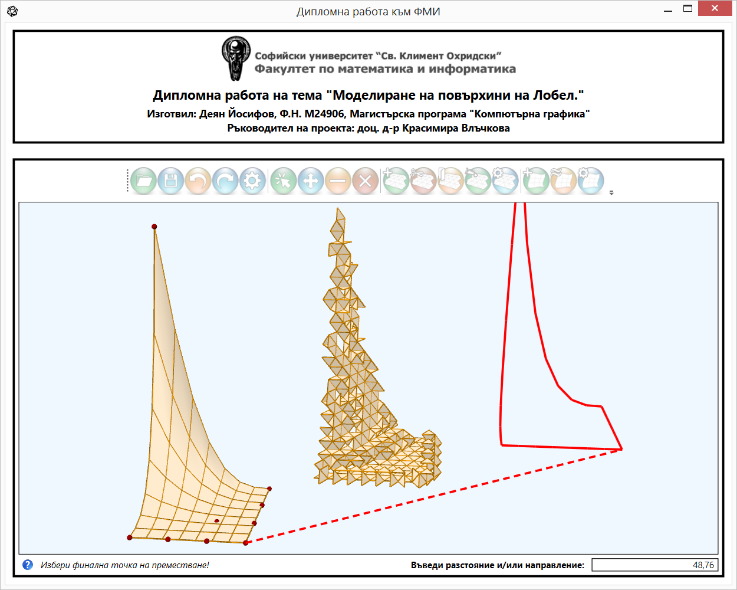


**Моделиране на повърхнини на Лобел**

****

**Cъдържание**

1. [Увод](#_Увод).
   1. [Проблеми на „Не-Евклидовата“ архитектура](Не-Евклидовата#_Проблеми_на_).
   2. [Повърхнини на Лобел](#_Повърхнини_на_Лобел).
   3. [Описание на поставените проблеми](#_Описание_на_поставените).
2. [Математически метод и алгоритми](#_Математически_метод_и).
3. Структури от данни използвани при имплементацията.
4. Напътствия при използване на приложението.
5. Библиография.

# Увод

С напредването на технологиите все по-често забелязваме модерни архитектурни явление характерни с техните разчупени форми, различаващи от стандартния за архитектурата паралелепипед. Сред известните имена на архитекти търсещи нестандарните решения са Франк Гери и Заха Хадид, но и мнозина други архитекти от нашето съвремие. Често пъти, коректно или не, този тип архитектура бива наречен „Не-Евклидова архитектура“ заради кривите форми на използваните повърхнини. Примери на някои такива проектни решения могат да бъдат видяни на следващите картинки.



## Проблеми на „Не-Евклидовата архитектура“

Проектирането и последващото практическо изпълнение на този тип архитектура в повечето случаи струва в пъти повече от стандартната архитектура. Оскъпяването идва от няколко различни фактора:

* **Сложности при самото проектиране**. Моделирането на такива форми изисква по-сложни изчисления касаещи отделните елементи и съгласуването на инсталации от различни специалности. Отделно изработването на детайли и четими монтажни схеми е нелека задача, тъй като често пъти всеки отделен елемент и детайл е различен от другите.
* **Сложност при изработката на материалите**. Ако формата не бъде разчленена на някакви равнинни парчета, това често пъти прави изработката на отделните елементи доста трудна и скъпа. Дори и отделните парчета да са равнинни, наличието много различни видове форми на всяка от частите също оскъпява и забавя допълнително производствения процес.
* **Сложност при строежа на архитектурния обект**. Сглабянето на всичките различни елементи на сградата може да се окаже доста сложна задача, дори при наличието на добри монтажни чертежи и схеми. Това изисква високо квалифицирана работна ръка, която е по-скъпа. Отделно самият процес е по-бавен от конвенционалното строителство, а както знаем „времето е пари“.

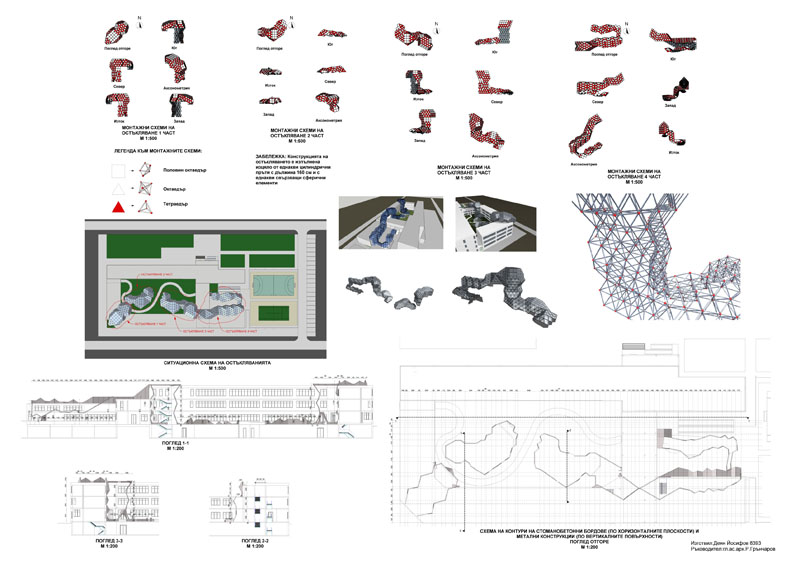
Всички тези оскъпяващи проблеми биха могли да се решат ако сложната структура се изгради от максимален брой еднакви елементи с минимален брой разлики в монтажните детайли между отделните парчета. Едно такова решение са така наречените повърхнини на Лобел, за които следва да обясним какво представляват.

## Повърхнини на Лобел

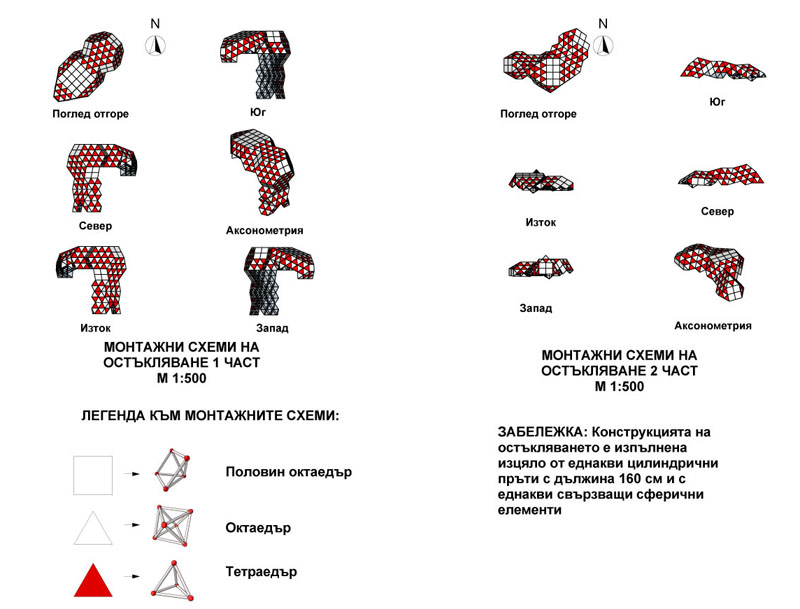
В близките няколко години френският архитект Ален Лобен работи по изследването на архитектурни структури изградени изцяло от еднакви равностранни триъгълници. Вероятно други хора също са се сблъсквали с този въпрос, но разработките на този френски архитект в неговия web site <http://www.equilatere.net/> постепенно налагат името на такива структури като „Повърхнини на Лобел“ или на английски – „Lobel Frames”.

Самият аз като студент по архитектура през 2011 година разработих преддипломен работен проект на реконструкция на НПМГ „акад. Любомир Чакалов“, който проект използваше метална конструкция изградена изцяло от еднакви равностранни триъгълници. По това не бях чувал за разработките на Ален Лобел, макар и да бях търсил доста в интернет за проучване разработки на подобни конструкции. Това ме води на мисълта, че вероятно разработките на френския колега са сравнително скорошни и дори да са били налични през 2011, то те са били твърде нови в интернет пространството, за да бъдат откриваеми.

По-долу може да видите едно от таблата към моя проект, което има ситуация, изгледи, перспективи и монтажни схеми на въпросната конструкция.



Особено внимание бих искал да обърна с по-близък поглед към част от монтажните схеми, които разясняват простотата на въпросната конструкция.



Както може да се види от легендата цялата конструкция е изградена от еднакви октаедри и тетраедри, които в крайна сметка оформят една повърхнина от еднакви равностранни триъгълници. Тази повърхнина позволява да бъде изградена изцяло от еднакви пръти свързани в еднакви сверични възли. Тази еднаквост на елементите позволява едновременно бързо производство, бърз и лесен монтаж на мястото на обекта следвайки простите двуцветни монтажни схеми (червен триъгълник означава тетраедър, а бях означава октаедър, както е видно и от легендата).

Единствената трудност, която остана нерешена е сложността на проектирането на въпросната конструкция. По времето, което аз работих този проект нямаше софтуер, който да ми помага с лесното моделиране на такъв тип конструкция. Това, което направих тогава беше да напиша един просто plug-in за Google Sketch Up, който да може от наличен равностранен триъгълник да вдига от него тетраедър, октаедър или икосаедър. Този плъгин може да бъде видян в моя Github акаунт: <https://github.com/deyan-yosifov/Deyan-Projects/tree/master/Ruby/SketchUpPlugins/dpy-equilateral>. Макар и с този плъгин, моделирането на цялостната структура беше доста трудоемка задача. Първоначално измоделирах една крива произволна повърхнина с известна програма, така че формата да отговаря на практическите и визуални цели, които търсех. След това вкарах модела в Google Sketch Up и започнах да добавям и трия тетраедърчета и октаедърчета едно по едно, така че получената структура да доближава първоначално измоделираната повърхнина. Добавянето и триенето на триъгълници един по един беше наистина времеемко, но тогавашните ми слаби познания по програмиране не ми позволиха да автоматизирам този процес.

И тук идва темата на сегашната дипломна работа, целяща да се улесни процеса при моделирането и проектирането на такива структури от еднакви триъгълници.

## Описание на поставените проблеми

Основната цел на сегашната дипломна работа е разработка на софтуер, който да улесни проектирането и моделирането на повърхнини на Лобел. Този софтуер ще предоставя следните възможности:

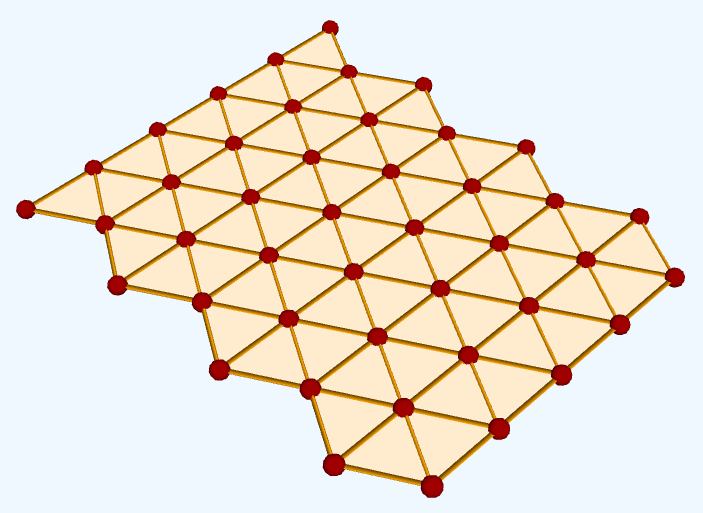
* **Моделиране на повърхнина на Лобел от една равнинна плоскост с равностранни триъгълници на принципа на известното японско изкусктво „киригами“.** На кратко обяснено киригами представлява рязане, огъване и лепене на лист хартия, така че да се измоделира някаква по-сложна триизмерна структура. На практика всяка повърхнина на Лобел може да се измоделира от един достатъчно голям лист хартия, който е разграфен с мрежа от еднакви равностранни триъгълници. Наличието на операции „рязане“, „огъване“ и „лепене“ на такива разграфени равнинни елементи, би позволило на ползвателя на софтуера да моделира или модифицира дадени повърхнини на Лобел.
* **Предоставяне на алгоритми за приближаване на дадена произволна повърхнина с повърхнина на Лобел.** Докато моделирането със способите на киригами може да се окажа трудоемка и времеемка задача, то предлагането на такива алгоритми би позволо да се измоделира първо една произволна повърхнина и след това с един клик алгоритъмът да предложи приближение на въпросната повърхнина с мрежа от еднакви равностранни триъгълници.
* **Предоставяне на операции за отваряне и записване на работата в определени тримерни файлови формати.** Това е ключово поради три причини. Първо – за да може да моделира обекти от реален проект, ползвателя на софтуера трябва да може да вкара в програмата своя първоначален проект, в който иска да интегрира повърхнината на Лобел. Второ – когато човек използва софтуера би следвало да има възможност да запише работата си, за да може в последствие да я продължи. Трето – когато работа по моделирането е завършена, тя би следвало да може да бъде записана в известен файлов формат, който да може да бъде отварян от други програми, където работата по моделирането и интегрирането на геометрията може да продължи.
* **Предоставяне на операции за връщане или повтаряне на определена стъпка от работа с програмата.**Тези операции в други програми са известки като Undo-Redo и за ключови от гледна точка, че грешна стъпка по време на моделирането би трябвало да може да бъде лесно върната, а не да трябва да се започва работата от начало.

# Математически метод и алгоритми

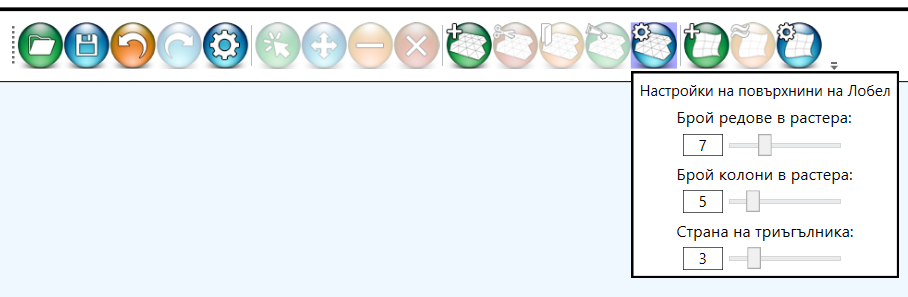
В тази секция ще опиша идеите, реализирани в текущата имплементация на приложението, както и математическите изчисления необходими за осъществяването на алгоритмите. Както споменахме и в уводната част приложението ще предложи два подхода за моделиране на повърхнини на Лобел. Първият е моделиране на принципа на Киригами - с рязане, прегъване и лепене на мрежа от еднакви равностранни триъгълници. Вторият метод е с готов алгоритъм, който приближава една произволна пространствена повърхнина с повърхнина на Лобел на базата само на зададена страна на равностранните триъгълници от мрежата на Лобел.

## Моделиране на принципа на Киригами

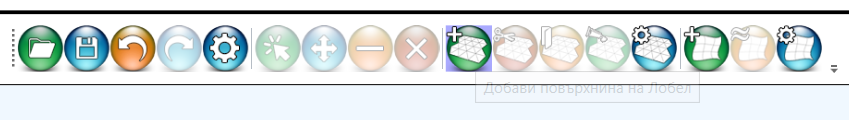
Киригами е известно японско изкуство, което изучава методите на създаване на пространствени макети чрез рязане, прегъване и лепене на лист хартия. Напрактика всяка повърхнина на Лобел би могла да бъде измоделирана от достатъчно голям лист хартия разграфен от мрежа с еднакви равностранни триъгълници, като показаната на картинката.



Както може да се види на долната картинка, тази мрежа може да се дефинира в приложението с 3 параметъра – брой редове в растера, брой колони в растера и размер на страната на всеки от равностранните триъгълници.



Избирайки желаните параметри, ползвателя на моето приложение е необходимо само да натисне зеления бутон със знак „+“, предвиден за добавяне на нова повърхнина на Лобел.

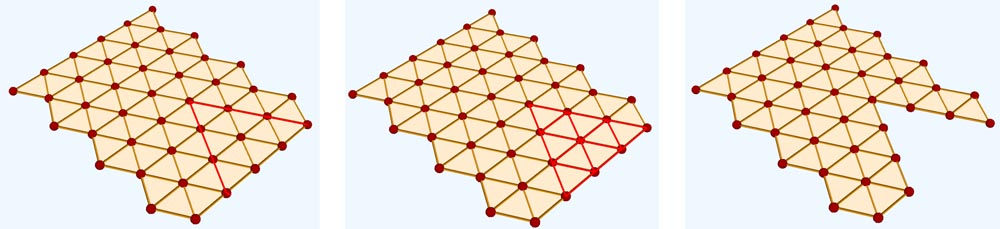


И това е – вече имаме начална мрежа и можем да започнем да я модифицираме с бутоните за рязане, прегъване и лепене, показани по-долу.



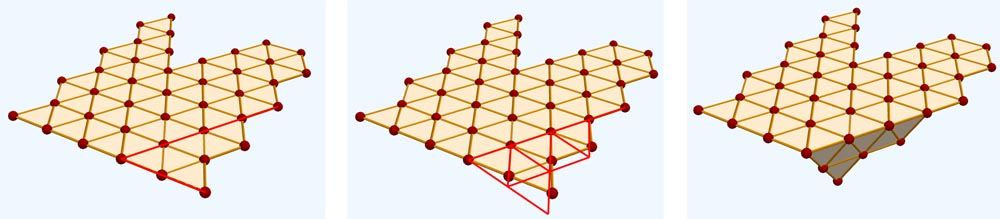
#### Рязане

Рязането на мрежата ни позволява да селектираме определени триъгълници и да ги премахнем от съществуващата мрежа. Селекцията се прави чрез избиране на червените точки във върховете на мрежата. На долната картинка е показана последователността от примерно селектиране на точки от мрежата, резултатът от селектираните триъгълници и резултатът след изрязването на въпросните триъгълници.



#### Прегъване

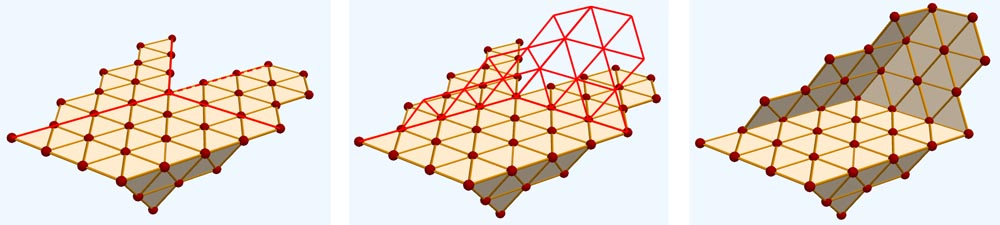
Прегъването е ключова операция, когато искаме равнинната мрежа от равностранни триъгълници да я превърнем в пространствена такава. Едно прегъване може да бъде дефинирано чрез избирането на 3 контролни точки – първите две дефинират оста на ротация (оста на прегъване), а последната трета точка дефинира полуравнината, която ще бъде ротирана (прегъната). На следващата картинка може да се види как примерът от предната секция за „Рязане“ е продължен с една операция за прегъване. Трите съседни картинки показват трите етапа на операцията „Прегъване“ в приложението. Първо се селектират трите контролни точки дефиниращи прегъването. След това се вижда селекцията от триъгълничета, които ще се ротират около оста на прегъване. На последната картинка се вижда резултатът от прегъването след като е избран ъгъл на ротиране 110 градуса.



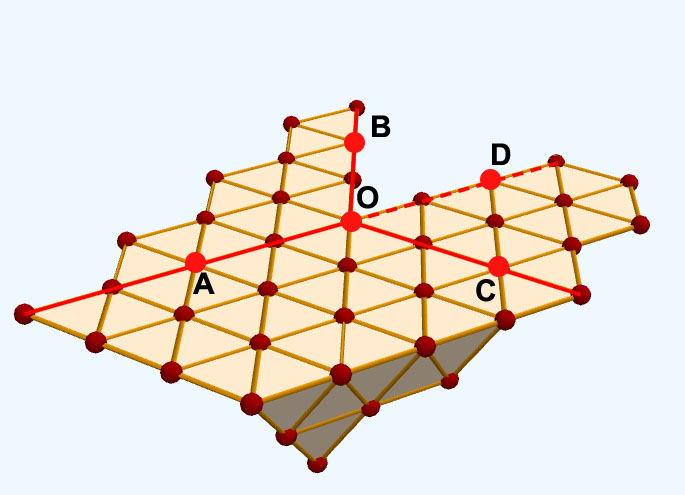
#### Прегъване със залепяне

Често пъти при моделирането на повърхнината може да се наложи да огънем две съседни парчета от мрежата, така че страните два от ръбовете им да се залепят един за друг. Такова залепяне може да се случи само при определени ъгли на огъване на съответните парчета и тези ъгли на огъване не са лесни за пресмятане с просто око. Поради тази причина моето приложение предлага още един подход за огъване, при който се задават две оси на ротация (на прегъване) и приложелнието пресмята и предлага възможните ъгли на ротация, така че съседните ръбове да се залепят един за друг.

Нека покажем нагледно какво се има предвид под „прегъване със залепяне“, продължавайки моделирането на примера от предните две секции („рязане“ и „прегъване“). За целта ще прегънем двете парчета около дупката получена след като изпълнихме операцията „рязане“. На долната схема се виждат трите етапа от двуосовото прегъване, които са резултат от операцията в моето приложение. Първият етап е селектирането на 5 контролни точки от мрежата – точка обща за двете оси на прегъване, точка дефинираща първата ос на прегъване, точка дефинираща първата полуравнина на прегъване, точка дефинираща втората ос на прегъване и точка дефинираща втората полуравнина на прегъване. На втората картинка се виждат селектираните триъгълници в първото им възможно положение на ротация. Приложението прелага възможност да избираш между всички възможни ъгли на ротации чрез кликане с мишката. В случая има две възможни ротации, така че съседните ръбове да съвпадат – едната е показаната на картинката така че ротираните точки да са в горното полупространство спрямо първоначалната им равнина, а втората е огледална в долното полупространство. На третата картинка се вижда и резултатът от изпълнението на операцията „прегъване със залепяне.



Тъй като тази операция изисква с една идея по-сложни изчисления от предните две ще споменем на бързо методът на пресмятане на възможните ъгли на ротация. За целта ще вземем няколко точки от ключовите за операцията линии. Нека точка **О** бъде общата точка за двете оси на ротация. Нека вземем точка **А**, която да лежи на първата ос на ротация и точка **C**, която да лежи на втората ос на ротация. Освен това нека изберем по една точка на всеки от ръбовете, които искаме да бъдат „залепени“ след прегъването. Нека точка **B** бъде върху първия ръб , а точка **D** бъде от втория ръб. Нека също така точките **B** и **D** да са избрани така, че да са на равно разстояние от точка **О**. По този начин целта на операцията е да намерим ъглите, на които трябва да се ротират парчетата **AOB** и **COD**, съответно около осите OA и OC, така че в крайна сметка след ротациите точките **B** и **D** да съвпаднат. Обозначенията на точките могат да бъдат видяни на долната картинка.



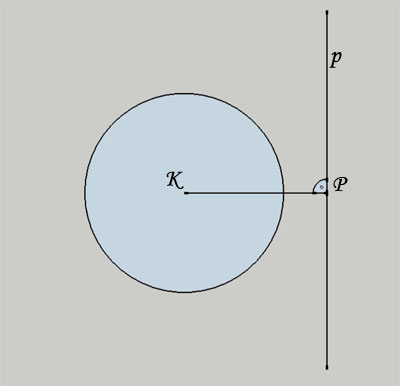
Нека обозначим с **i** и **j** съответно единичните вектори по двете оси, както следва:



При прегъването точките **B** и **D** описват две окръжности. Нека окръжността описана от точка **B** е с център **K**, а окръжността описана от **D** е с център **L**. Центровете на окръжностите лежат върху съответните оси на ротация. Освен това равнините на окръжностите са с нормали съответно векторите **i** и **j**. Следователно центровете могат да се намерят с проектиране на точките **B** и **D** върху осите на ротация, както следва.



За да намерим възможните ъгли на ротация, така че точките **B** и **D** да съвпаднат, ние напрактика трябва да търсим пресечни точки между двете окръжности. Такива точки ако евентуално съществуват ще се намират върху пресечната права на равнините на двете окръжности. Нека тази пресечна права между две равнини означим с буквата **p**. Нека също така означим върха на перпендикуляра от центъра **K** до правата **p** с точката **P**. Така отсечката **KP** ще е най-късата съзваща центъра **K** с правата **p**. Ако разгледаме равнината на окръжността с център K, то ще получим картинка сходна на показанато долу.



Нека видим как можем да пресметнем точката **P**. Нека кръстим единичен вектор по правата **p** със същата буква **p**. Тъй като този вектор лежи едновременно в равнините на двете окръжности, то за него можем да кажем следното.



Тъй като **p** е перпендикулярен и на двете оси на ротация, то той може да бъде сметкат като тяхнно векторно произведение.



От своя страна отсечката **KP** е перпендикулярна едновременно на оста на ротация и на правата **p**, откъдето следва че можем да намерим вектор колинеарен на отсечката **KP** като пресметнем векторното произведение на **p** и **i**.



Последното условие ни позволява много лесно да пресметнем точката **P** като пресечна точка на права и равнина. А именно ако дефинираме правата с точка **K** и вектор колинеарен на **KP** и равнината с точка центъра **L** и нормала вектора **j**, то не е трудно да преценим, че пресечната точка **P** на дефинираните права и равнина може да се сметне със следното уравнение.



Така след като успяхме да пресметнем точката P, вече можем да се върнем на нашата задача да намерим дали има подходящи пресичания на окръжността с център **K** и правата **p**. Дали има изобщо пресичания можем да кажем в зависимост от дова дали отсечката **KP** e по-голяма, по-малка или равна на радиуса на окръжността. Този радиус е равен на дължината на отсечката **KB**.

**Първият случай** е, в който радиусът е по-малък от отсечката. В този случай окръжността изобщо не пресича правата **p** и следователно нашата задача няма решение.



**Вторият случай** е, в който радиусът е точно равен на **KP**. Тогава потенциално решение на нашата задача е точно точката **P**.



В този случай, за да проверим дали **P** наистина е решение, то трябва да проверим дали разстоянието между **P** и центъра на другата окръжност **L** е равен на радиуса на съответната окръжност, който е **LD**.

Ако **LP** е различно от **LD** тогава задачата ни няма решение.



Ако обаче **LP** е равно на **LD** тогава **P** е решение на нашата задача. Това означава, че съществуват ъгли **α** и **β**, при които ротираните съответно точки **B** и **D** ще съвпаднат с точката **P**.



**Третият случай** е, в който радиусът **KB** е по-голям от дължината на **KP**. Тогава имаме две пресичания на окръжността с правата **p** и съответно две потенциални точки решения на нашата задача, които ще кръстим с буквите **M** и **N**.



Нека първо сметнем двете пресичания на окръжността с правата **p**. Тези две точки **M** и **N** могат да бъдат изчислени по следния начин.

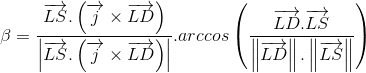
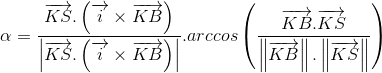


Сега вече можем да проверим дали потенциалните решения **M** и **N** са наистина решения на задачата. Това отново може да бъде направено като бъдат сметнати разстоянията от **M** и **N** до центъра **L** на другата окръжност. Ако разстоянието е равно на радиуса на втората окръжност, то тогава съответната точка може да се каже, че е решение на нашата задача.



Иначе казано задачата за намиране на възможните решения така че двата ръба да съвпаднат след прегъването би могло да доведе до максимално две решения.

За пълнота на пресмятанията ще добавя и последните сметки от приложението, които ще ни позволят да изчислим ъглите на ротация, така че двата ръба да „залепнат“ след прегъването. Нека кръстим с **S** точката решение на нашата задача, в която точките B и D ще съвпаднат след прегъването. Както вече знаем S лежи едновременно на двете окръжности. Долните изчисления показват как да намерим съответните ъгли на ротация **α** и **β**, на които трябва да се ротират съоветно точката **B** и точката **D**.

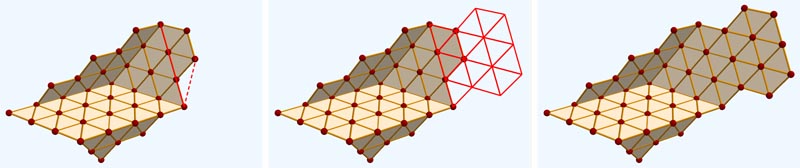


Така, смятайки ъглите на ротация за различните решения на задачата можем да ротираме съответните точки от повърхнината на Лобел около съответните оси за да получим желаният резултат на „прегъване със залепяне“.

#### Залепяне

Последната операция от метода на моделиране подобно на „Киригами“ е операцията залепяне. Чрез нея можем да добавим допълнителни триъгълници към съществуващата повърхнина. Това е важно, тъй като ни позволява да продължим с моделирането в дадена посока, когато триъгълниците в тази посока вече са се изчерпали и е необходимо удължаването на повърхнината в тази посока. Друг случай, в който операцията „залепяне“ би могла да ни бъде полезна е ако имаме съществуваща повърхнина на Лобел, в която поради някаква причина има дупки по средата на самата повърхнина. Такива дупки могат да се получат или от рязане на повърхнината или от алгоритъм за генериране на такава повърхнина, който поради някаква причина е оставил липсващи триъгълници в средата. Такива липсващи триъгълници могат лесно да бъдат добавени с операцията „залепяне“.

Нека покажем нагледно какво се има предвид под „залепяне“, продължавайки моделирането на примера от предните три секции („рязане“, „прегъване“ и „прегъване със залепяне“). За целта ще добавим няколко реда с триъгълници към дясната половина на дотук измоделираната повърхнина на Лобел. Първо селектираме точката в долния десен ъгъл и точка в горния десен ъгъл на повърхнината. Тези две точки дефинират ръба, от който ще започне залепянето. След това селектираме трета точка, която ще дефинира полуравнината, в която ще добавяме редове с триъгълници. С въвеждане от клавиатурата можем да специфицираме колкоо точно редове искаме да добавим, като в примера долу сме избрали да добавим три реда с триъгълници. Натискайки Enter за потвърждение операцията е завършена и повърхнината е удължена с допълнителните триъгълници. На долната картинка може да види етапите, през които протича залепянето и крайният резултат.



## Моделиране с апроксимиращи алгоритми

Както видяхме в предишния метод, със средствата на Киригами бихме могли да измоделираме напрактика всяка една повърхнина изградена изцяло от равностранни триъгълници. Това обаче може да се окаже доста трудоемка и времеемка задача, изискваща особена съобразителност, за да може човек да избере правилните операции в правилния ред и да стигне до желания резултат. Затова нашето приложение ще предложи втори метод за моделиране, при който само с едно кликане на мишката ще можеш да създадеш комплексна повърхнина на Лобел, приближаваща някаква друга параметрично дефинирана повърхнина.

В тази секция ще покажем 4 различни разновидности на такива алгоритми за апроксимиране на дадена повърхнина с такава на Лобел. За по-лесно обясняване на логиката на алгоритмите преди това ще дефинираме няколко термина, които се използват от всичките 4 алгоритъма.

#### Дискретна UV мрежа

Нека имаме пространствена повърхнина дефинирана с функция с два параметъра **u** и **v**, която да е непрекъсната в интервала [0; 1] на всеки от параметрите.



**U-линия** ще наричаме линия от повърхнината, за която стойността на u параметъра е константа. **V-линия** ще наричаме линия от повърхнината, за която стойността на v параметъра е константа. Нека вземем една повърхнина **r** и вземем нейните **u** и **v** линии, избирайки последователни стойности на параметрите u и v, така че интервалът [0; 1] да бъде разделен на равни подинтервали. Нека сега, използвайки пресечните точки на **u** и **v** линиите, да добавим по два триъгълника във всеки от пространствените четириъгълници, получени между съседните линии. Така получената мрежа от триъгълници ще наречем дискретна UV мрежа.

Нека опишем казаното по-горе с малко по-конкретни формули. Нека „нарежем“ **r** функцията на **n** парчета в посока на **u** линиите и **m** парчета в посока на **v** линиите. Тогава за всяка от стойностите на параметрите **u** и **v** можем да кажем следното.



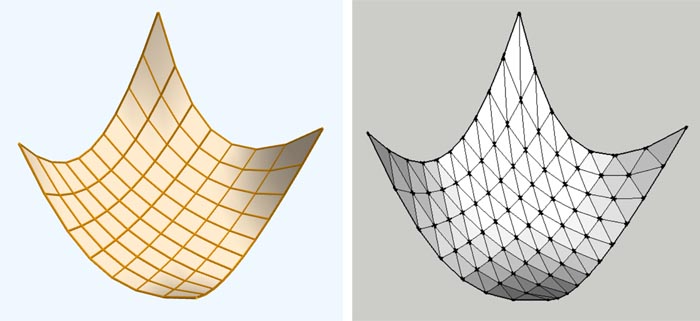
Тогава пресечните точки на **u** и **v** линиите можем да запишем по следния начин.



Тогава дискретната UV мрежа се дефинира от всички триъгълници между съседните **u** и **v** линии дефинирани по следния начин.



На долната картинка е показана една примерна повърхнина **r**, върху която са нарисувани **u** и **v** линиите при стойности на **n** и **m** съответно 7 и 10. От дясната страна е показана съответващата дискретна UV мрежа при съответното деление на повърхнината.



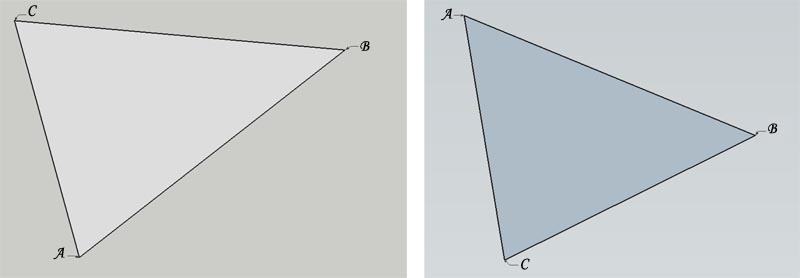
Алгоритмите, които ще опишем след малко могат да приближават дискретна UV мрежа с повърхнина на Лобел. Както е видно, колкото повече деления изберем за оригиналната повърхнина **r**, толкова по-близо до нея ще бъде и съответната дискретна мрежа. Затова за целите на апроксимиране с повърхнини на Лобел можем да кажем, че алгоритмите, които ще покажем са подходящо решение за апроксимиране на произволна параметрична повърхнина, която е непрекъсната в интервала на двата си параметъра [0, 1].

#### Окта-Тетра мрежа

Нека разгледаме следната рекурсивна структура състояща само от еднакви равностранни триъгълници. Нека като първа стъпка да изберем някъде в пространството един равностранен триъгълник **ABC**. Ще гледаме на този триъгълник като на ориентирана тройка от точки, като лицето в виждащо се от едното полупространство ще наричаме „лице“ на триъгълника и ще го оцветяваме в бяло на схемите, а лицето виждащо се от другото полупространство ще наричаме „гръб“ на триъгълника и ще го оцветяваме в синьо. Полупространството, от което ще виждаме лицето на ориентирания триъгълник ABC, ще бъде дефинирано от посоката на нормалния вектор **n** за триъгълника, който ще дефинираме по следния начин.



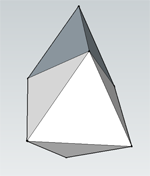
На долната картинка могат да бъдят видяни два перспективни погледа към началният ориентиран триъгълник **ABC** – един гледащ към лицето на триъгълника и друг гледащ към гърба му.



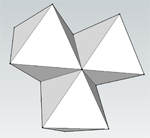
На следващата стъпка ще направим следното – откъм лицето на първоначалния триъгълник ще добавим още 3 триъгълника, така че общо четирите получени триъгилника да образуват тетраедър. Също така ще искаме всички новосъздадени триъгълници да са ориентирани така, че лицето им да сочи към вътрешността на тетраедъра. Като резултат се получава следния тетраедър.



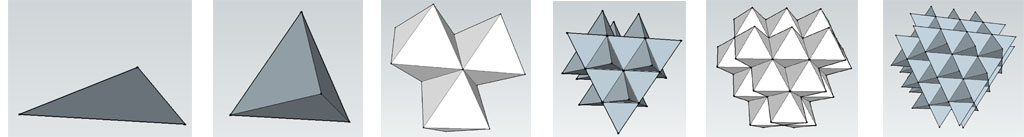
На следващата стъпка нека добавим към първоначалния триъгълник още 7 триъгълника от страната на неговия гръб. Тези общо 8 триъгълника ще бъдат добавени така че да се получи един октаедър. Освен това новите триъгълници ще бъдат така ориентирани, че гърбовете на всеки от тях да гледат към вътрешността на октаедъра. Като резултат се получават залепени тетраедър и октаедър, които могат да бъдат видяни на картинката долу.



Тук е моментът да отбележим едно интересно наблюдение, която ще бъде използвано от нашата рекурсивна конструкция. Двустенните ъгли на октаедъра и тетраедъра се допълват до 180 градуса. Поради тази причина съседните странични триъгълници на октаедъра и тетраедъра са копланарни, както може да се забележи и на горната картинка. Сега нека на следващата стъпка на всеки от останалите 3 триъгълника от тетраедъра да добавим по един октаедър от страната на техните гърбове.



Както забелязваме пространството между всеки два съседни октаедъра може да бъде запълнено от един тетраедър, за който само трябва да бъде добавен ръба, свързващ срещуположните им свободни върхове. Следвайки логиката от предните стъпки можем да продължим рекурсията по следния начин. На една стъпка добавяме триъгълници затварящи тетраедри. На следващата стъпка добавяме триъгълници затварящи октаедри. След това пак тетраедни, после пак октаедри и т.н. Така можем да продължим нашата рекурсия до безкрайност разширявайки получената мрежа във всички посоки. Това гарантира, че всяка точка от пространството в някакъв момент от рекурсията ще попадне или във вътрешността на тетраедър или във вътрешността на октаедър или на граничен триъгълник между съседни октаедър и тетраедър. За всеки триъгълник от нашата мрежа можем да кажем, че е равностранен, еднакъв на всички останали от мрежата, от страната на лицето му винаги започва един тетраедър, докато от страната на гърба му винаги започва един октаедър. На долната картинка могат да се видят последователните стъпки от рекурсията, като се започне от един ориентиран триъгълник и на всяка следваща се редува добавянето на нови тетраедри и нови октаедри към структурата.



Тази рекурсивна структура от еднакви равностранни ориентирани триъгълници ще наречем Окта-Тетра мрежа. Такава мрежа ще бъде използвана от всички наши следващи алгоритми, като на всяка стъпка от алгоритмите ще се избира подходящ триъгълник от мрежата така че да се апроксимира най-добре дадена дискретна UV мрежа с повърхнина на Лобел.

#### Ориентирана проекционна площ

За целта на нашите алгоритми ще търсим близостта между триъгълниците на апроксимираната и апроксимиращата мрежа на базата на проектирани обеми заключени между двете повърхности. За да обясним по-лесно идеята в тримерното пространство обаче ще започнем първо с обяснение на аналогична идея в равнинния случай, където ще можем да покажем чертежи и изчисления. В равнинния случай, за да търсим близост между отсечка и линия ще дефинираме понятието „ориентирана проекционна площ“.

Нека имаме една равнинна параметрична крива **r** зададена параметрично с векторна функция на един параметрък, както следва.



Нека също така имаме една отсечка с крайща точките **A** и **B**. Дефинираме функция **p** върху тази отсечка, която ще дава разстоянието от всяка точка на отсечката до най-близката проектирана точка от линията **r**. Това разстояние ще е ориентирано, като ще го взимаме със знак плюс за точки от **r**, които са в едната полуравнина спрямо AB и със знак минус за точки от r, които са в другата полуравнина спрямо AB. За целите на задачата няма голямо значени коя полуравнина ще изберем с положителни стойности на **p(t)** и коя с отрицателни. За функцията **p** можем да кажем следните неща.



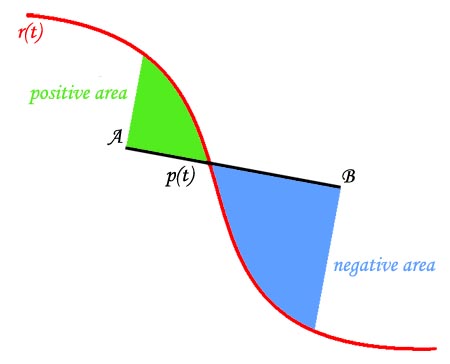
Възможно е за някои точки от отсечката AB да не съществува проекция на точка от **r**. За такива точки ще додефинираме функцията **p** и ще кажем, че за тях **p** има стойност 0.



Така след като вече имаме дефинирана функцията **p** в целия интервал от 0 до 1, вече можем да кажем какво имаме предвид под **ориентирана проекционна площ** **SAB** на отсечката **AB**. А именно тя модул от сумираната ориентирана площ заключена между отсечката **AB** и линията **r**.



За по-голяма ясното на описаните термини може да погледнете долния примерен четеж.



На чертежът положителната площ е обозначена със зелен цвят, а отрицателната със син. Така или иначе, както вече обяснихме, за целта на задачата не е от значения коя от площите ще бъде смятана със знак плюс и коя със знак минус, тъй като след като площите се сумират резултатът за **SAB** се взима с модул.

#### Ориентиран проекционен обем

След като изяснихме понятието „ориентирана проекционна площ“ вече можем да обясним аналогичното в тримерното пространство понятие „ориентиран проекционен обем“.

Нека имаме една пространствена повърхнина **r** дефинирана с два параметъра.



Нека също така имаме един ориентиран триъгълник **ABC**. Дефинираме функция **p** на два параметъра върху триъгълника **ABC**, където **p** ще дава разстоянието от всяка точка на триъгълника до най-близката проектирана точка от повърхнината **r**. Това разстояние ще е ориентирано, като ще го взимаме със знак плюс за точки от **r**, които са в едното полупространство спрямо **ABC** и със знак минус за точки от **r**, които са в другото полупространство спрямо **ABC**. За целите на задачата няма голямо значени кое полупространство ще изберем с положителни стойности на **p(u, v)** и коe с отрицателни. За функцията **p** можем да кажем следните неща.



Възможно е за някои точки от триъгълника **ABC** да не съществува проекция на точка от **r**. За такива точки ще додефинираме функцията **p** и ще кажем, че за тях **p** има стойност 0.



Така след като вече имаме дефинирана функцията **p** в цялата дефиниционна област на параметрите **u** и **v**, вече можем да кажем какво имаме предвид под **ориентиран проекционен обем** **VABC** на триъгълника **ABC**. А именно той е модул от сумирания ориентиран обем заключен между триъгълника **ABC** и повърхнината **r**.

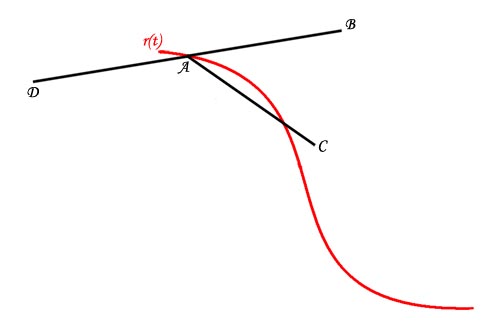


Както се вижда от формулата сумираните обеми се взимат по модул и затова, както вече споменахме, е без значение в кое полупространство обемите ще ги смятаме със знак плюс и в кое със знак минус.

#### Усреднено ориентирано проекционно разстояние

Нека сега изясним последното понятие, което ще ни е необходимо за описването на алгоритмите за апроксимиране. Отново първо ще покажем двумерния случай с подходящи примери и чертежи и в последствие ще продължим към описанието в тримерното пространство, където дефинициите са аналогични.

Нека имаме следната поставена задача. Имаме равнинна линия определена с векторното параметрично уравнение с един параметър **r(t)**. Нашата задача е да апроксимираме тази равнинна линия с равни по дължина отсечки, които се избират от дадено множество с отсечки. На долната картинка е показана линията **r** и три отсечки **AB**, **AC** и **AD**, от които трябва да изберем точно една. Целта е избраната отсечка да „апроксимира“ най-добре дадената крива.



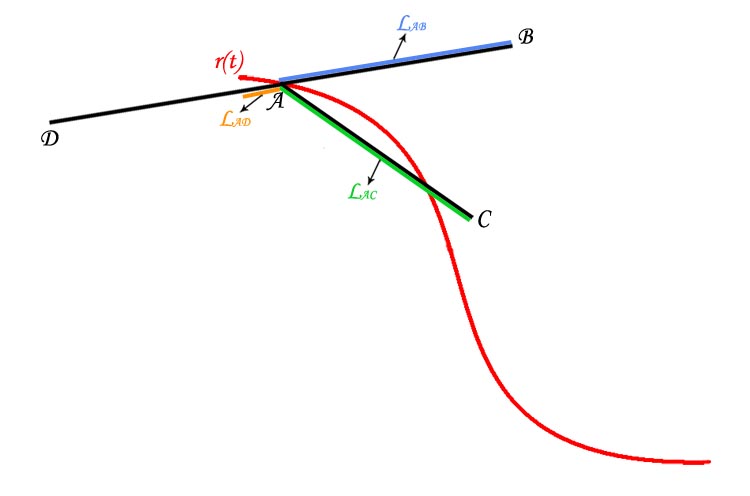
Чисто на око, поглеждайки задачата, изглежда, че отсечката **AC** е най-близо до желаната линия и вероятно тя е най-подходящия избор от даденото ни множество отсечки. Как обаче бихме могли да изчислим тази близост, така че да изберем правилната отсечка. Нека опитаме с вече дефинирания термин „ориентирана проекционна площ“ и да видим какъв резултат ще получим в случая. Нека първо сравним проекционните площи **SAB** и **SAC** съответно на отсечките **AB** и **AC**. Отсечката **AB** има проекционни разстояния по цялата си дължина и те освен, че са доста големи, са и само в едната полуравнина. Това прави **SAB**  доста голямо като стойност. От своя страна **AC** също има проекции по цялата си дължина, но те освен, че са доста по-малки по дължина, също така са и в двете полуравнини спрямо отсечката. По този начин отрицателните и положителните пложи се унищожават частично и **SAC** има гарантирано по-малка стойност.



До тук изглежда, че ориентираният проекционен обем може да свърши добра работа за изчисляване на близост за отсечки, при които има проекции по цялата им дължина. Нека видим обаче какво можем да кажем за **SAD**. Отсечката **AD** в по-голямата си част изобщо няма проекции, поради, което в по-голямата си част нейната проекционна площ според дефиницията остава на минималната си нулева стойност. Единствено в малка част в единият край на отсечката има малка проекционна площ, която обаче въпреки, че е едностранна, все пак е по-малка от сумарната площ на отсечката AC.



Оттук забелязваме, че като че ли ориентираната проекционна площ няма да ни свърши работа за гранични случаи, при които някоя отсечка има твърде голяма дължина без дефинирани проекционни разстояния. За решаването на този проблем ще въведем понятието „усреднено ориентирано проекционно разстояние“. На долната картинка може да видите означени с различни цветове дължините от отсечките, които имат реални проекции на линията **r** върху тях. Тези дължини ще кръстим с **LAB**, **LAC** и **LAD** и на долната картинка те могат да бъдат видяни визуализирани съответно в синьо, зелено и оранжево.



Усреднено ориентирано проекционно разстояние на отсечката AB ще наричаме отношението между **SAB** и **LAB** и същото ще го означаваме с **DAB**.



Тъй като отсечките AB и AC са равни по дължина и има проекции по цялата си дължина, то **LAB** и **LAC** са равни. Това от своя страна гарантира запазване на неравенството между проекционните им площи като то ще бъде със същата посока при усреднените им проекционни разстояния.



Нека видим какво се случва със сравнението на между близостта на **AC** и **AD**. Тъй като **AD** има в пъти по-малка проекционна дължина в сравнение с **AC**, то при делението на **LAD** стойността на **DAD** ще се увеличи значително. Това ще позволи да се обърне неравенството в полза на отсечката **AC**.



Така критерият „усреднено ориентирано проекционно разстояние“ изглежда по-подходящ при избор на апроксимиращи отсечки. На практика това разстояние е отношение между площ и дължина, което го прави също с мерна единица за дължина. На практика то ни дава средното разстояние между отсечката и линията **r**, откъдето идва и името му.

Сега след като изяснихме това понятие за двумерния случай нека прехвърлим разсъжденията към аналогичния тримерен случай. В следващите алгоритми за апроксимиране ние ще разполагаме на всяка стъпка с някакво множество от еднакви равностранни триъгълници и ще трябва да изберем най-добрия триъгълник, който апроксимира най-добре дадена тримерна повърхнина **r**. Аналогично на двумерния случай, че забележим че в граничните случаи, при които голяма част от даден триъгълник **АBC** няма проекции върху себе си, тогава ориентираният проекционнен обем **VABC** може да се окаже не съвсем подходящо средство за сравняване. Затова ще пресмятаме площта от триъгълника **ABC**, върху която реално има проекции на повърхнината **r**. Тази проекционна площ ще означим с **SABC**. По този начин в тримерния случай отново ще дефинираме понятието „усреднено ориентирано проекционно разстояние“ **DABC** като отношение на **VABC** и **SABC**.



Във тримерния случай **DABC** е отношение на обем и площ и мерната му единица отново дължина. В крайна сметка, както и в двумерния случай, тази стойност представлява средното проекционно разстояние между точките в триъгълника и точките от провърхнината, което обяснява и името „усреднено ориентирано проекционно разстояние“.

Накрая ще споменем на бързо случая, в който **SABC** е нула, обяснявайки защо този случай не трябва да ни притеснява. Когато тази площ е нула следва, че триъгълника **ABC** няма никакви прокции върху себе си или ако има то те образуват множество с нулева площ (например отсечка или точка). Такива триъгълници можем да кажем, че са неподходящи за апроксимиране на желатата повърхнина **r** и тях можем да ги изключим от сравненията и сметките касаещи **DABC**.

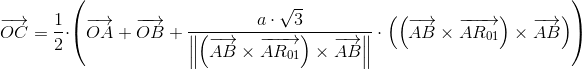
#### Апроксимиращи алгоритми – обща информация и начални условия

Следващите четири секции ще разяснят действието на четири различни вариации на апроксимиращи алгоритми. Алгоритмите са подредени хронологично според тяхното появяване, като всеки следващ се опитва да подобри резултатът на апроксимация спрямо предходния.

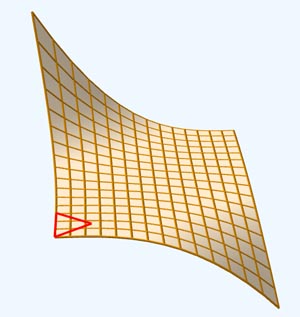
Всичките алгоритмите, които ще предложим, са базирани на една Окта-Тетра мрежа, от която се избират апроксимиращи триъгълници на всяка стъпка от итерацията. Тук е моментът да кажем, че този принцип на изчисления на алгоритмите ограничава получените резултати до подмножество на всички повърхнини на Лобел. Това подмножество ползва точно две стойности на двустенните ъгли между съседните триъгълници – двустенен ъгъл на октаедър и двустенен ъгъл на тетраедър. Реално повърхнините на Лобел биха могли да имат й двустенен ъгъл на икосаедър, както и други произволни ъгли в части от повърхнината, където тя е само с единична кривина.

Като входни данни алгоритмите изискват точно два параметъра, за да започнат апроксимацията. Първият параметър е повърхнината, която трябва да бъде апроксимирана. Алгоритмите в това приложение работят с дискретни UV мрежи като входен параметър. Вторият параметър е размерът на страната на равностранните триъгълници в резултатната повърхнина на Лобел. Знаейки апроксимираната дискретна UV мрежа и размера на равностранния триъгълник, алгоритъмът започва пресмятането на апроксимираща повърхнина на Лобел.

Всеки от алгоритмите започва пресмятането с поставянето на първия апроксимиращ равностранен триъгълник. Първият триъгълник се слага в единия ъгъл на UV мрежата, като идеята при неговото позициониране е той да тангира с повърхнината в този й край. Нека този първи триъгълник бъде кръстен с **ABC**. Нека също така страната на равностранния триъгълник да бъде с размер **а**. За точките от апроксимираната дискретна UV мрежа ще използваме означението **Rij** от [секцията за дискретни UV мрежи](#_Дискретна_UV_мрежа). С тези означения можем да пресметнем точките **A**, **B** и **C** по следния начин.



На долната картинка може да се види примерна апроксимирана повърхнина с нейните UV линии и първият апроксимиращ равностранен триъгълник, който е нарисуван с червено.

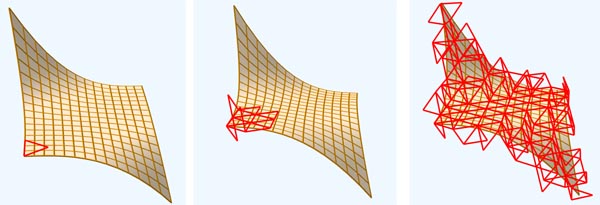


Поставяйки първия ориентиран триъгълник, алгоритъмът еднозначно определя Окта-Тетра мрежата, от която в последствие ще избира следващите триъгълници. Както беше споменато в [секцията за Окта-Тетра мрежите](#_Окта-Тетра_мрежа), характерно за тази геометрична структура е, че до всеки триъгълник има тетраедър от лицевата му страна и октаедър от страната на неговия гръб.

Алгоритъмът продължава като от избрания триъгълник добава в една опашка от стъпки следващите рекурсивни стъпки. Всяка такава стъпка предлага едно множество от триъгълници, които са били съседни на последния избрах триъгълник от рекурсията. На всяка стъпка апроксимиращият алгоритъм ще избира ще избира от множеството предоставени триъгълници най-подходящия. Критерият за избора на най-добрия триъгълник е [усредненото ориентирано проекционно разстояние](#_Усреднено_ориентирано_проекционно) между триъгълника и апроксимирантата повърхнина. Триъгълникът с най-малко такова разстояние се приема за най-близък до повърхнината и става част от финалната апроксимираща повърхнина на Лобел. Сметките приключват, когато рекурсивните стъпки в опашката свършат или когато някое специфично за алгоритъма условие е изпълнено. Ако трябва да опишем действието на алгоритъма с точки то те биха излгеждали по следния начин:

1. Избира се първият равностранен триъгълник.
2. Към опашката на рекурсивните стъпки се добавят първите стъпки, съдържащи триъгълници съседи на първия.
3. Изважда се рекурсивна стъпка от опашка.
4. Избира се най-близък до повърхнината триъгълник от предложеното множество в текущата рекурсивна стъпка. В случай, че никой от триъгълниците няма проекционна площ, тогава не се избира нито един триъгълник и се отива направо към **точка 6**.
5. Към опашката на рекурсивните стъпки евентуално се добавят нови стъпки, съдържащи триъгълници съседи на последния избран.
6. Проверява се дали алгоритъмът трябва да приключи. Краят настъпва ако са свършили стъпките в рекурсивната опашка или е изпълнено някакво специфично за алгоритъма условие. Ако не е настъпил краят, тогава се връщаме към **точка 3**.

На долната картинка могат да се видят 3 кадъра от действието на един примерен алгоритъм - избора на първия триъгълник, резултатът от изборите в първите няколко рекурсивни стъпки и резултатните триъгълници към края на сметките на алгоритъма.

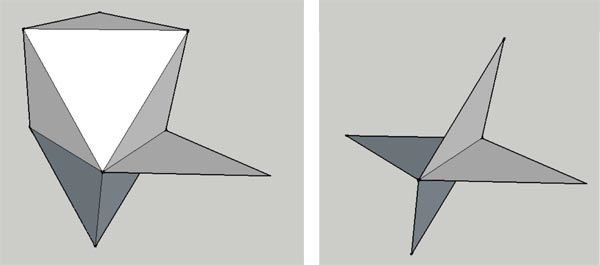


Разликите в различните алгоритми ще са основно в точка 5, където трябва да се създадат новите рекурсивни стъпки на база съседите на последния избран триъгълник. Нека сега разгледаме по-детайлно всеки алгоритмите по отделно с примери.

#### Lobel Mesh Projecting Algorithm

Името на алгоритъма идва от следната специфика – при избора на най-добър триъгълник в **точка 4**, алгоритъмът проектира точки от апроксимираната дискретна UV мрежа в равнината на триъгълника. Точките **Rij**, които се проектират във вътреността на триъгълника се маркират като „покрити“. Алгоритъмът приключва действието си в **точка 6**, ако всички **Rij** бъдат маркирани като покрити. За кратко в тази глава ще назоваваме алгоритъма с абриевиатурата **LMP** (Lobel Mesh Projecting).

Сега да изясним как **LMP** избира следващите рекурсивни стъпки, за да ги добави в опашката на рекурсията в **точка 5**. За всеки от трите ръба на триъгълника се проверява дали може да се създаде рекурсивна стъпка. Такава рекурсивна стъпка ще съдържа съседните на ръба триъгълници, от които в последствие трябва да се избере точно един, който има най-малко усреднено ориентирано проекционно разстояние до апроксимираната мрежа. Както може да се види на долната картинка, до всеки ръб на триъгълник има точно по един съседен октаедър и един съседен тетраедър. На втората част от картинката могат да се видят само триъгълниците от октаедъра и тетраедъра, които съдържат съответния ръб.



От картинката виждаме, че всяка следваща рекурсивна стъпка ще съдържа точно 3 триъгълника, съседни прения избран. Сега остава да разберем критерият, по който **LMP** решава дали да съзаде рекурсивната стъпка или не. Рекурсивната стъпка се създава само ако никой от трите съседни триъгълника не е бил създаван от предходна рекурсивна стъпка на алгоритъма. Логиката, която се крие зад този критерии е, че ние целим да създадем повърхнина на Лобел и не искаме да имаме повече от два триъгълника имащи общ ръб.

И така нека видим как биха изглеждали точките, описващи работата на **LMP**.

1. Избира се първият равностранен триъгълник.
2. Към опашката на рекурсивните стъпки се добавят първите три рекурсивни стъпки за всеки от ръбовете на триъгълника.
3. Изважда се рекурсивна стъпка от опашка.
4. Избира се най-близък до повърхнината триъгълник от предложеното множество в текущата рекурсивна стъпка. В случай, че никой от триъгълниците няма проекционна площ, тогава не се избира нито един триъгълник и се отива направо към **точка 6**. Освен това точките от UV мрежата се проектират върху избрания триъгълник и тези които попаднат във вътрешността му се маркират като „покрити“.
5. Към опашката на рекурсивните стъпки евентуално се добавят нови стъпки, съдържащи триъгълници съседи на последния избран. За всеки от ръбовете се добавя по една рекурсивна стъпка, в случай че съответната стъпка не съдържа вече използват от алгоритъма триъгълник.
6. Проверява се дали алгоритъмът трябва да приключи. Краят настъпва ако са свършили стъпките в рекурсивната опашка или ако всички точки **Rij** от UV мрежата вече са маркирани като „покрити“. Ако не е настъпил краят, тогава се връщаме към стъпка 3.

Да видим няколко примера за практическата работа на алгоритъма.